BTS IG1 Devoir Maison 31/03

Au rayon location d'un grand magasin, on loue à la semaine des machines-outils, et on se propose d'étudier la rentabilité de ce service.

Partie A – Étude du coût de fonctionnement

On suppose que le coût de fonctionnement hebdomadaire (en centaines d'euros) correspondant à la location de n machines est donné par :

$$C(n) = 4n + 9 - 20\ln(0{,}2n + 1) \quad (n \text{ entier naturel}).$$

1. Calculer, en arrondissant à 1 € près, C(10) et C(20).
Le coût de fonctionnement hebdomadaire est-il proportionnel au nombre de machines louées ?

2. On pose $c(x) = 4x + 9 - 20\ln(0{,}2x + 1)$ (x réel positif ou nul)
Calculer $c'(x)$ et vérifier que $c'(x) = \dfrac{0{,}8x}{0{,}2x + 1}$

En déduire le sens de variation du coût.

Partie B – Étude de la rentabilité

Chaque machine est louée 300 € par semaine.

1. Expliquer pourquoi le bénéfice hebdomadaire (en centaines d'euros) correspondant à la location de n machines est donné par :

$$B(n) = -n - 9 + 20\ln(0{,}2n + 1) \quad (n \text{ entier naturel}).$$

2. On pose $b(x) = -x - 9 + 20\ln(0{,}2x + 1)$ (x réel positif ou nul)

a. Calculer $b'(x)$ et vérifier que $b'(x) = \dfrac{-0{,}2x + 3}{0{,}2x + 1}$.

b. Étudier le sens de variation de la fonction b sur l'intervalle $[0\,;40]$.

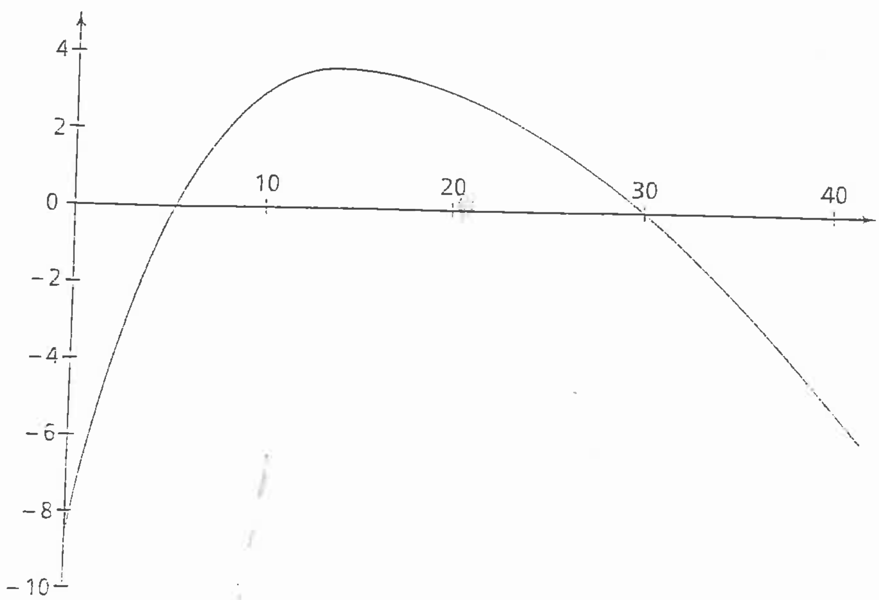
c. Dresser le tableau de variation de la fonction b.

(On donnera les arrondis, à 10^{-2} près, des valeurs particulières)

3. On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction b.
En vous aidant du graphique, dire :

a. Combien le magasin doit louer de machines par semaine pour que le bénéfice réalisé soit positif.

b. Quel est, arrondi à un euro près, le bénéfice maximal réalisable en une semaine ?



Nougaret
Romain
IG 1

Math

10/10 TB

Partie A:

1) $C(x) = 4x + 9 - 20\ln(0{,}2x + 1)$

$C(10) = 49 - 20\ln(3)$

$= 27{,}03$ soit 2703 euros

$C(20) = 89 - 20\ln(5)$

$= 56{,}81$ soit 5681 euros

Le cout de fonctionnement n'est pas proportionnel au nombre de machines louées.

2) $C(x) = 4x + 9 - 20\ln(0{,}2x + 1)$

$C'(x) = 4 - \dfrac{20 \times 0{,}2}{0{,}2x + 1}$

$= \dfrac{0{,}8x + 4 - 4}{0{,}2x + 1}$

$= \dfrac{0{,}8x}{0{,}2x + 1}$

$x \geq 0$

donc : $0{,}8x \geq 0$

on a donc le tableau suivant

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$0{,}2x+1$	$+$
$c(x)$	$\nearrow$

on sait que : $0{,}2x + 1 \neq 0$

donc : $0{,}2x \neq -1$

$x \neq -\dfrac{1}{0{,}2}$

$x \neq -5$

Partie B :

1) Le bénéfice est défini par :

$B(x) = 3x - C(x)$

$= 3x - [4x + 9 - 20\ln(0{,}2x+1)]$

$B(x) = -x - 9 + 20\ln(0{,}2x+1)$

2) $B'(x) = -1 + 20 \times \frac{0{,}2}{0{,}2x+1}$

$= \frac{-0{,}2x - 1 + 4}{0{,}2x+1}$

$= \frac{-0{,}2x + 3}{0{,}2x+1}$

Or sait que : $x \geq 0$

donc : $0{,}2x + 1 > 0$

on a donc :

x	0		15		40
$-0{,}2x+3$		+	0	−	
$b(x)$	-9	↗	3,13	↘	$-5{,}05$

3) a) Par semaine le magasin doit louer entre 5 et 30 machines pour réaliser un bénéfice positif.

b) Le bénéfice maximal réalisable en une semaine se fait en louant 15 machines, il est de 3 13 €